文章编号　1000-5269(2022)06-0031-06　　**DOI**:10.15958/j.cnki.gdxbzrb.2022.06.04

广义黏性隐迭代序列的均衡问题和不动点问题

沈金良*
(福州大学至诚学院,福建 福州 350002)

摘　要:利用黏性逼近方法构造了一种新的非扩张映射广义隐迭代序列,在 Hilbert 空间研究了此序列的均衡问题与不动点问题,并在适当条件下证明了此序列强收敛于非扩张映射的不动点集和均衡问题解集的公共元。

关键词:广义黏性逼近方法;隐迭代;非扩张映射;Hilbert 空间
中图分类号:O177.91　　**文献标志码**:A

均衡理论和不动点理论是非线性分析的重要组成部分。很多学者对非扩张映射的不动点问题和均衡问题进行深入研究,建立更有效的迭代格式以逼近非扩张映射不动点集和均衡问题解集的公共元。近年来,许多学者不断从空间、迭代格式、证明方法以及算子等方面对已有的结论进行了推广,并取得了较好的研究结果,见文献[1-7]及其相关文献。

对于二元函数 $G:C\times C\to R$, 其均衡问题(以 EP 表示)可定义为:寻找 $x\in C$, 使得

$$G(x,y)\geqslant 0(\forall y\in C) \tag{1}$$

将式(1)的解集记为 $\mathrm{EP}(G)$, 即

$$\mathrm{EP}(G)=\{x\in C:G(x,y)\geqslant 0,\forall y\in C\}$$

给定映射 $T:C\to H$, 对于所有的 $x,y\in C$, 设 $G(x,y)=\langle Tx,y-x\rangle$, 则有 $z\in \mathrm{EP}(G)$ 当且仅当 $\langle Tz,y-z\rangle\geqslant 0(\forall y\in C)$, 即 z 为变分不等式的解。对于任意的 $x,y\in C$, 设 $G(x,y)=T(y)-T(x)$, 则有 $z\in \mathrm{EP}(G)\Leftrightarrow T(z)=\inf\limits_{y\in C}T(y)(\forall y\in C)$, 即 z 是最小值问题的解。因此,均衡问题(1)涵盖了变分不等式问题、优化问题、最值问题以及 Nash 均衡问题,等等。

2015 年,XU 等[8]利用黏性逼近方法构造了非扩张映射隐中点迭代序列:

$$x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)T\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right),n\geqslant 0 \tag{2}$$

其中 $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$,f 是压缩映射, T 是非扩张映射, 并在 Hilbert 空间中得到了强收敛定理。

同一年, KE 等[9]提出了广义黏性隐迭代序列:

$$x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)T[s_n x_n+(1-s_n)x_{n+1}],n\geqslant 0 \tag{3}$$

其中 $\{\alpha_n\},\{s_n\}\subset(0,1)$,$f$ 是压缩映射, T 是非扩张映射, 并在某些条件下得到了该序列的强收敛定理。

2018 年,沈金良[10]研究了如下非扩张映射 T 的隐中点迭代序列:给定 $x_1\in C$, 有

$$\begin{cases}G(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\geqslant 0,\forall y\in C\\ x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)T\left(\dfrac{u_n+x_{n+1}}{2}\right)\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$,$\{r_n\}\subset(0,\infty)$, 并且在 Hilbert 空间中得到了该序列的弱收敛和强收敛定理。

2020 年,沈金良等[11]研究了如下非扩张映射的隐中点黏性迭代序列:给定 $x_1\in C$, 有

$$\begin{cases}G(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\geqslant 0,\forall y\in C\\ x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)T\left(\dfrac{u_n+x_{n+1}}{2}\right)\end{cases} \tag{5}$$

并且在 Hilbert 空间中证明了序列 $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 强收敛于 $F(T)\cap \mathrm{EP}(G)$ 中的某一个点 z, 其中 $z=P_{F(T)\cap \mathrm{EP}(G)}f(z)$。

受到上述成果的启发,本文针对非扩张映射的不动点问题和均衡问题的公共解,利用黏性逼近技

收稿日期: 2021-10-19
基金项目: 福建省自然科学基金面上资助项目(2019J01651);福建省中青年教师教育科研资助项目(JA15624,JAT200945)
作者简介: 沈金良(1982—),男,副教授,硕士,研究方向:非线性分析,E-mail:181401539@qq.com.
*通讯作者: 沈金良,E-mail:181401539@qq.com.

巧,在 Hilbert 空间中提出一种新的广义黏性隐迭代序列,并且在某些条件下证明了该迭代序列的强收敛性,所取得的成果推广了文献[10]和[11]的结论。

1 预备知识

文中始终假设 H 是实 Hilbert 空间, C 是 H 的非空闭凸子集。序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 记为 $x_n \rightharpoonup x$, 以及 $\{x_n\}$ 强收敛于 x 记为 $x_n \to x$。任取一点 $x \in H$, 则必可在 C 中找到唯一的最近距离点 $P_C(x)$, 使得

$$\| x - P_C(x) \| \leqslant \| x - y \|, \forall y \in C$$

称 P_C 为 H 在 C 上的投影算子,则显然 P_C 是非扩张映射,而且对于 $x \in H$ 以及 $z \in C$, 有

$$z = P_C(x) \Leftrightarrow \langle x - z, z - y \rangle \geqslant 0, \forall y \in C$$

为了求解均衡问题 EP(G), 假设函数 G 满足以下 4 个条件:

(A1) $G(x,x) = 0, \forall x \in C$;

(A2) G 是单调的,即 $G(x,y) + G(y,x) \leqslant 0, \forall x,y \in C$;

(A3)对所有的 $x,y,z \in C$, 有 $\lim\limits_{t \to 0} G(tz + (1-t)x, y) \leqslant G(x,y)$;

(A4)对任意的 $x \in C$, $y \mapsto G(x,y)$ 是凸的和下半连续的。

定义 1 设 C 是 H 的闭子集, $T: C \to C, f: C \to C$ 是两个映射。

(1)对于任意的 $x,y \in C$, 都有 $\| Tx - Ty \| \leqslant \| x - y \|$, 则称 T 是非扩张映射。

(2)对于 C 中的序列 $\{x_n\}$, $x_n \rightharpoonup x_0 \in H$ 和 $Tx_n \to 0$ 可以推导出 $Tx_0 = 0$, 则映射 T 在 0 点是半闭的。

(3)对于任意的 $x,y \in C$, 存在常数 $\alpha \in [0,1)$, 使得 $\| f(x) - f(y) \| \leqslant \alpha \| x - y \|$, 则称 f 是压缩映射。

引理 1[12] 设 C 是 H 中的非空闭凸子集, $G: C \times C \to R$ 满足(A1)—(A4)。设 $r > 0, x \in H$, 则存在 $z \in C$ 满足 $G(z,y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x \rangle \geqslant 0, \forall y \in C$。

引理 2[12] 设映射 $G: C \times C \to R$ 满足(A1)—(A4)。对 $r > 0, x \in H$, 定义映射 $S_r: H \to C$ 为

$$S_r(x) = \{ z \in C: G(z,y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x \rangle \geqslant 0, \forall y \in C \}, \forall x \in H$$

则有:

(1) S_r 是单值的;

(2) S_r 是稳定非扩张映射,即 $\| S_r x - S_r y \|^2 \leqslant \langle S_r x - S_r y, x - y \rangle, \forall x,y \in H$;

(3) $G(S_r) = \mathrm{EP}(G)$;

(4) EP(G) 是非空闭凸的。

引理 3[13] 设 C 是 H 的非空闭凸子集, $T: C \to C$ 是非扩张映射。如果 T 有不动点,那么 $I - T$ 在 0 点是半闭的(这里 I 是 H 中的恒等映射),即如果 C 中的任意序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x \in C$ 且有序列 $\{(I - T)x_n\}$ 强收敛到 y, 则有 $(I - T)x = y$。

引理 4[14] 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是三个非负数列, $\{c_n\} \subset [0,1)$ 并且满足以下条件:

$$\begin{cases} a_{n+1} \leqslant (1 - c_n)a_n + b_n, n \in N \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \infty, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \end{cases}$$

则 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$。

引理 5[15] 设 $\{a_n\}$ 是一个非负实数列,其满足 $a_{n+1} \leqslant (1 - \beta_n)a_n + \beta_n \sigma_n + \delta_n, n \geqslant 0$, 其中 $\{\beta_n\} \subset [0,1]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$, $\limsup\limits_{n \to \infty} \sigma_n \leqslant 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$。那么 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$。

2 主要结论

定理 1 设 C 是 H 中的非空闭凸子集, $G: C \times C \to R$ 是二元函数,满足(A1)—(A4)。$f: C \to C$ 是压缩映射, $T: C \to C$ 是非扩张映射, $\Omega = F(T) \cap \mathrm{EP}(G)$ 非空。任意给定 $x_0 \in C$, $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 的定义如下:

$$\begin{cases} G(u_n,y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geqslant 0, \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)T[s_n u_n + (1 - s_n)x_{n+1}] \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\{\alpha_n\}$, $\{s_n\} \subset (0,1)$, $\{r_n\} \subset (0,\infty)$, 并且满足以下条件:

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$;

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$;

(iv) $0 < \varepsilon \leqslant s_n < 1 (n \geqslant 1)$;

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |s_{n+1} - s_n| < \infty$;

(vi) $\liminf\limits_{n \to \infty} r_n > 0$;

(vii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty$;

则序列 $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 强收敛于 $z \in \Omega$, 其中 $z = P_\Omega f(z)$。

证明　下面分 5 步来证明定理 1。

1)序列 $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 有界。

任取 $q \in \Omega$, 由引理 2 可知 $u_n = S_{r_n}x_n$, 因此

$$\|u_n - q\| = \|S_{r_n}x_n - S_{r_n}q\| \leqslant \|x_n - q\|, \forall n \geqslant 1 \tag{7}$$

为了书写方便,令 $z_n = s_n u_n + (1 - s_n)x_{n+1}$, 则有 $x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)Tz_n$。

因为 T 是非扩张映射,所以

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\| &= \|\alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)Tz_n - q\| \\ &\leqslant \alpha_n \|f(x_n) - q\| + (1 - \alpha_n)\|Tz_n - q\| \\ &\leqslant \alpha_n \|f(x_n) - f(q)\| + \alpha_n \|f(q) - q\| + (1 - \alpha_n)\|z_n - q\| \\ &\leqslant \alpha_n \alpha \|x_n - q\| + \alpha_n \|f(q) - q\| + (1 - \alpha_n)s_n \|u_n - q\| + (1 - \alpha_n)(1 - s_n)\|x_{n+1} - q\|\end{aligned} \tag{8}$$

对式(8)进行移项,结合式(7)整理得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\| &\leqslant \frac{\alpha\alpha_n + (1 - \alpha_n)s_n}{1 - (1 - \alpha_n)(1 - s_n)}\|x_n - q\| + \frac{\alpha_n}{1 - (1 - \alpha_n)(1 - s_n)}\|f(q) - q\| \\ &= \left[1 - \frac{(1 - \alpha)\alpha_n}{1 - (1 - \alpha_n)(1 - s_n)}\right]\|x_n - q\| + \frac{(1 - \alpha)\alpha_n}{1 - (1 - \alpha_n)(1 - s_n)} \cdot \frac{1}{1 - \alpha}\|f(q) - q\| \\ &\leqslant \max\left\{\|x_n - q\|, \frac{1}{1 - \alpha}\|f(q) - q\|\right\}\end{aligned}$$

由递推公式可知

$$\|x_n - q\| \leqslant \max\left\{\|x_0 - q\|, \frac{1}{1 - \alpha}\|f(q) - q\|\right\}, \forall n \geqslant 0 \tag{9}$$

所以 $\{x_n\}$ 是有界序列,同时 $\{u_n\}$, $\{Tx_n\}$, $\{Tu_n\}$, $\{Tz_n\}$ 也都是有界的。

2) $\lim \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0$。

因为 $x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)Tz_n$, 所以

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &= \|\alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)Tz_n - \alpha_{n-1}f(x_{n-1}) - (1 - \alpha_{n-1})Tz_{n-1}\| \\ &= \|\alpha_n f(x_n) - \alpha_n f(x_{n-1}) + \alpha_n f(x_{n-1}) - \alpha_{n-1}f(x_{n-1}) + (1 - \alpha_n)Tz_n - (1 - \alpha_n)Tz_{n-1} + (1 - \alpha_n)Tz_{n-1} - (1 - \alpha_{n-1})Tz_{n-1}\| \\ &\leqslant \alpha_n \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \times \|f(x_{n-1}) - Tz_{n-1}\| + (1 - \alpha_n)\|Tz_n - Tz_{n-1}\| \\ &\leqslant \alpha_n\alpha \|x_n - x_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}|K + (1 - \alpha_n)\|z_n - z_{n-1}\| \\ &= \alpha_n\alpha \|x_n - x_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}|K + (1 - \alpha_n)\|s_n u_n + (1 - s_n)x_{n+1} - s_{n-1}u_{n-1} - (1 - s_{n-1})x_n\| \\ &= \alpha_n\alpha \|x_n - x_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}|K + (1 - \alpha_n)\|s_n(u_n - u_{n-1}) + (1 - s_n)(x_{n+1} - x_n) + (s_n - s_{n-1})(u_{n-1} - x_n)\| \\ &\leqslant \alpha_n\alpha \|x_n - x_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}|K + (1 - \alpha_n)s_n \|u_n - u_{n-1}\| + (1 - \alpha_n)(1 - s_n)\|x_{n+1} - x_n\| + (1 - \alpha_n)|s_n - s_{n-1}|\|u_{n-1} - x_n\|\end{aligned} \tag{10}$$

其中, $K = \sup\{\|f(x_n) - Tz_n\| : n \in N\}$。

由式(6)可得

$$G(u_{n+1}, y) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle y - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geqslant 0, \forall y \in C \tag{11}$$

$$G(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geqslant 0, \forall y \in C \tag{12}$$

在式(11)中取 $y = u_n$, 则有

$$G(u_{n+1}, u_n) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geqslant 0 \tag{13}$$

在式(12)中取 $y = u_{n+1}$, 则有

$$G(u_n, u_{n+1}) + \frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n\rangle \geqslant 0 \tag{14}$$

把式(13)和式(14)相加,再根据(A2)进行整理可得

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} - \frac{u_{n+1} - x_{n+1}}{r_{n+1}}\right\rangle \geqslant 0$$

所以

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1})\right\rangle \geqslant 0$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \inf r_n > 0$, 所以必然存在实数 $b > 0$, 使得 $r_n > b(n \geqslant 1)$。因此有

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2 \leqslant \langle u_{n+1} - u_n, x_{n+1} - x_n + (1 - \frac{r_n}{r_{n+1}})(u_{n+1} - x_{n+1})\rangle$$

$$\leqslant \|u_{n+1}-u_n\|\left(\|x_{n+1}-x_n\|+\left|1-\frac{r_n}{r_{n+1}}\right|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|\right)$$
$$=\|u_{n+1}-u_n\|\left(\|x_{n+1}-x_n\|+\frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1}-r_n|\,\|u_{n+1}-x_{n+1}\|\right)$$
$$\leqslant \|u_{n+1}-u_n\|\left(\|x_{n+1}-x_n\|+\frac{1}{b}|r_{n+1}-r_n|\,\|u_{n+1}-x_{n+1}\|\right) \tag{15}$$

取 $L=\sup\{\|u_n-x_n\|:n\in N\}$，由式(15)得

$$\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant\|x_{n+1}-x_n\|+\frac{1}{b}|r_{n+1}-r_n|L \tag{16}$$

因为 $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 都是有界序列，所以 $\{\|u_{n-1}-x_n\|\}$ 也是有界的，因此存在实数 $M>0$，使得

$$\|u_{n-1}-x_n\|\leqslant M,\forall n\geqslant 1 \tag{17}$$

由式(10)、(16)和(17)可得

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\alpha_n\alpha\|x_n-x_{n-1}\|+|\alpha_n-\alpha_{n-1}|K+(1-\alpha_n)s_n\left(\|x_n-x_{n-1}\|+\frac{1}{b}|r_n-r_{n-1}|L\right)+(1-\alpha_n)(1-s_n)\|x_{n+1}-x_n\|+(1-\alpha_n)|s_n-s_{n-1}|M$$

对上式进行移项整理得

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\frac{\alpha_n\alpha+(1-\alpha_n)s_n}{1-(1-\alpha_n)(1-s_n)}\|x_n-x_{n-1}\|+\frac{|\alpha_n-\alpha_{n-1}|K+\frac{1}{b}|r_n-r_{n-1}|L+|s_n-s_{n-1}|M}{1-(1-\alpha_n)(1-s_n)}$$
$$=\left[1-\frac{(1-\alpha)\alpha_n}{1-(1-\alpha_n)(1-s_n)}\right]\|x_n-x_{n-1}\|+\frac{|\alpha_n-\alpha_{n-1}|K+\frac{1}{b}|r_n-r_{n-1}|L+|s_n-s_{n-1}|M}{1-(1-\alpha_n)(1-s_n)} \tag{18}$$

因为 $0<\varepsilon\leqslant s_n<1$，所以必有 $0<\varepsilon\leqslant s_n<1-(1-\alpha_n)(1-s_n)<1$。由式(18)可得

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant[1-(1-\alpha)\alpha_n]\|x_n-x_{n-1}\|+\frac{1}{\varepsilon}(|\alpha_n-\alpha_{n-1}|K+\frac{1}{b}|r_n-r_{n-1}|L+|s_n-s_{n-1}|M)$$

由条件(ⅱ)、(ⅲ)、(ⅴ)、(ⅶ)以及引理 4 可推导出

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0 \tag{19}$$

再由式(16)和 $\|r_{n+1}-r_n\|\to 0(n\to\infty)$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\|u_{n+1}-u_n\|=0 \tag{20}$$

3) $\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$ 和 $\lim_{n\to\infty}\|u_n-Tu_n\|=0$。

任取 $q\in\Omega$，由 $u_n=S_{r_n}x_n$ 可知

$$\|u_n-q\|^2=\|S_{r_n}x_n-S_{r_n}q\|^2=\langle S_{r_n}x_n-S_{r_n}q,u_n-q\rangle\leqslant\langle u_n-q,x_n-q\rangle=\frac{1}{2}(\|u_n-q\|^2+\|x_n-q\|^2-\|x_n-u_n\|^2)$$

即有

$$\|u_n-q\|^2\leqslant\|x_n-q\|^2-\|x_n-u_n\|^2 \tag{21}$$

由式(21)有

$$\|x_{n+1}-q\|^2=\|\alpha_n[f(x_n)-q]+(1-\alpha_n)[Tz_n-q]\|^2\leqslant\alpha_n\|f(x_n)-q\|^2+(1-\alpha_n)\|Tz_n-q\|^2\leqslant\alpha_n\|f(x_n)-q\|^2+(1-\alpha_n)s_n\|u_n-q\|^2+(1-\alpha_n)(1-s_n)\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant\alpha_n\|f(x_n)-q\|^2+(1-\alpha_n)s_n\|x_n-q\|^2-(1-\alpha_n)s_n\|x_n-u_n\|^2+(1-\alpha_n)(1-s_n)\|x_{n+1}-q\|^2$$

上式移项整理得

$$(1-\alpha_n)s_n\|x_n-u_n\|^2\leqslant\alpha_n\|f(x_n)-q\|^2+(1-\alpha_n)s_n\|x_n-q\|^2+[(1-\alpha_n)(1-s_n)-1]\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant\alpha_n\|f(x_n)-q\|^2+(1-\alpha_n)s_n(\|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2)-\alpha_n\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant\alpha_n\|f(x_n)-q\|^2+(1-\alpha_n)s_n\|x_{n+1}-x_n\|\times(\|x_n-q\|+\|x_{n+1}-q\|)-\alpha_n\|x_{n+1}-q\|^2$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$，再由式(19)可知

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|=0 \tag{22}$$

由条件(ⅰ)(ⅴ)，式(19)(20)可得

$$\|x_n-Tz_n\|\leqslant\|x_n-Tz_{n-1}\|+\|Tz_{n-1}-Tz_n\|\leqslant\alpha_{n-1}\|f(x_{n-1})-Tz_{n-1}\|+\|z_{n-1}-z_n\|\leqslant\alpha_{n-1}\|f(x_{n-1})-Tz_{n-1}\|+(1-s_n)\|x_{n+1}-x_n\|+s_n\|u_n-u_{n-1}\|+|s_n-s_{n-1}|\times\|u_{n-1}-x_n\|\to 0(n\to\infty) \tag{23}$$

由式(19)、(22)和式(23)得

$$\|u_n-Tu_n\|\leqslant\|u_n-x_n\|+\|x_n-Tz_n\|+\|Tz_n-Tu_n\|\leqslant\|u_n-x_n\|+\|x_n-Tz_n\|+(1-s_n)\|x_{n+1}-x_n\|+(1-s_n)\|x_n-u_n\|=(2-s_n)\|u_n-x_n\|+\|x_n-Tz_n\|+\frac{1}{2}\|x_{n+1}-x_n\|\to 0(n\to\infty) \tag{24}$$

再由式(22)和式(24)得

$$\|x_n - Tx_n\| \leqslant \|x_n - u_n\| + \|u_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Tx_n\| \leqslant 2\|x_n - u_n\| + \|u_n - Tu_n\| \to 0 (n \to \infty) \tag{25}$$

4) $\limsup_{n\to\infty}\langle f(z) - z, x_n - z\rangle \leqslant 0$, 其中 $z = P_{\Omega} f(z)$。

由式(22),可取 $\{u_n\}$ 的一个子列 $\{u_{n_i}\}$, 使得

$$\begin{aligned}&\limsup_{i\to\infty}\langle f(z) - z, u_{n_i} - z\rangle \\ &= \limsup_{n\to\infty}\langle f(z) - z, u_n - z\rangle \\ &= \limsup_{n\to\infty}\langle f(z) - z, x_n - z\rangle\end{aligned}$$

因为 $\{u_{n_i}\}$ 有界,所以存在 $\{u_{n_i}\}$ 的一个子列 $\{u_{n_{ij}}\}$ 弱收敛于 v。不失一般性,直接假设 $u_{n_i} \rightharpoonup v$。由 $\|u_n - Tu_n\| \to 0 (n \to \infty)$, 可知 $Tu_{n_i} \rightharpoonup v$。下面证明 $v \in \Omega$。因为

$$G(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geqslant 0, \forall y \in C$$

由(A2)得 $\frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geqslant G(y, u_n)$, 所以有 $\left\langle y - u_{n_i}, \frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}}\right\rangle \geqslant G(y, u_{n_i})$。

再由 $\frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}} \to 0$ 和 $u_{n_i} \rightharpoonup v$, 以及(A4)证得 $G(y, v) \leqslant 0, \forall y \in C$。取 $t \in (0,1]$ 和 $y \in C$, 令 $y_t = ty + (1-t)v$。由于 $y \in C$ 及 $v \in C$, 所以 $y_t \in C$ 且 $G(y_t, v) \leqslant 0$。由(A1)和(A4)可得 $0 = G(y_t, y_t) = tG(y_t, y) + (1-t)G(y_t, v) \leqslant tG(y_t, y)$。因此 $0 \leqslant G(y_t, y)$。由(A3)得 $0 \leqslant G(v, y), \forall y \in C$, 所以证得 $v \in \mathrm{EP}(G)$。

下面证明 $v \in F(T)$。T 是非扩张映射,由引理3可知 $I - T$ 在 0 点是半闭的。由前面的证明可知 $\|u_n - Tu_n\| \to 0$ 和 $u_{n_i} \rightharpoonup v$, 所以 $v \in F(T)$。由此证得 $v \in \Omega$。因 $z = P_{\Omega} f(z)$, 故可得

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\langle f(z) - z, x_n - z\rangle \\ &= \limsup_{i\to\infty}\langle f(z) - z, u_{n_i} - z\rangle \\ &= \langle f(z) - z, v - z\rangle \leqslant 0\end{aligned} \tag{26}$$

5) $\lim_{n\to\infty}\|x_n - z\| = 0$ 和 $\lim_{n\to\infty}\|u_n - z\| = 0$。

由范数和内积的性质可知

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\|^2 &\leqslant (1-\alpha_n)^2\|Tz_n - z\|^2 + 2\alpha_n\langle f(x_n) - z, x_{n+1} - z\rangle \\ &\leqslant (1-\alpha_n)^2\|s_n u_n + (1-s_n)x_{n+1} - z\|^2 + 2\alpha_n\langle f(x_n) - f(z), x_{n+1} - z\rangle + 2\alpha_n\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle \\ &\leqslant (1-\alpha_n)^2 s_n\|u_n - z\|^2 + (1-\alpha_n)^2(1-s_n)\|x_{n+1} - z\|^2 + 2\alpha\alpha_n\|x_n - z\|\,\|x_{n+1} - z\| + 2\alpha_n\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle \\ &\leqslant (1-\alpha_n)^2 s_n\|x_n - z\|^2 + (1-\alpha_n)^2(1-s_n)\|x_{n+1} - z\|^2 + \alpha\alpha_n(\|x_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z\|^2) + 2\alpha_n\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\|^2 &\leqslant \frac{(1-\alpha_n)^2 s_n + \alpha\alpha_n}{1 - (1-\alpha_n)^2(1-s_n) - \alpha\alpha_n}\|x_n - z\|^2 + \frac{2\alpha_n\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle}{1 - (1-\alpha_n)^2(1-s_n) - \alpha\alpha_n} \\ &= \left[1 - \frac{2\alpha_n(1-\alpha)}{\alpha_n(2-\alpha-\alpha_n) + (1-\alpha_n)^2 s_n}\right]\|x_n - z\|^2 + \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n(2-\alpha-\alpha_n) + (1-\alpha_n)^2 s_n}\|x_n - z\|^2 + \frac{2\alpha_n}{\alpha_n(2-\alpha-\alpha_n) + (1-\alpha_n)^2 s_n}\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle \\ &= \left[1 - \frac{2\alpha_n(1-\alpha)}{\alpha_n(2-\alpha-\alpha_n) + (1-\alpha_n)^2 s_n}\right]\|x_n - z\|^2 + \frac{2\alpha_n(1-\alpha)}{\alpha_n(2-\alpha-\alpha_n) + (1-\alpha_n)^2 s_n} \times \left[\frac{\alpha_n\|x_n - z\|^2}{2(1-\alpha)} + \frac{1}{1-\alpha}\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle\right] \\ &= \left[1 - \frac{2\alpha_n(1-\alpha)}{\alpha_n(2-\alpha-\alpha_n) + (1-\alpha_n)^2 s_n}\right]\|x_n - z\|^2 + \frac{2\alpha_n(1-\alpha)}{\alpha_n(2-\alpha-\alpha_n) + (1-\alpha_n)^2 s_n} \times \left[\frac{\alpha_n}{2(1-\alpha)} I + \frac{1}{1-\alpha}\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle\right] \\ &= (1-\beta_n)\|x_n - z\|^2 + \beta_n\sigma_n\end{aligned}$$

其中

$$\beta_n = \frac{2\alpha_n(1-\alpha)}{\alpha_n(2-\alpha-\alpha_n) + (1-\alpha_n)^2 s_n}$$

$$\sigma_n = \frac{\alpha_n}{2(1-\alpha)} I + \frac{1}{1-\alpha}\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle$$

$$I = \sup\{\|x_n - z\|^2 : n \in \mathbf{N}\}$$

根据定理的条件可知, $\beta_n > \frac{2\alpha_n(1-\alpha)}{(2-\alpha)+1} = \frac{2(1-\alpha)}{3-\alpha}\alpha_n$。由条件(ⅰ)、(ⅱ)以及式(26)可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = \infty$, $\limsup_{n\to\infty}\sigma_n \leqslant 0$。再由引理 5 和式(24)得

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - z \| = 0 \tag{27}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n - z \| = 0 \tag{28}$$

由上述证明过程可知,序列 $\{x_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 强收敛于 $z \in \Omega$, 同时 z 也是变分不等式 $\langle (I-f)y, x-y\rangle \geqslant 0, x \in \Omega$ 的唯一解,即 $z = P_\Omega f(z)$。

注 1 在定理 1 中,如果 $s_n \equiv \frac{1}{2}$, 则式(6)转化为式(5),即文献[11]的主要结论。

注 2 在定理 1 中,如果 $f \equiv I$(恒等映射), $s_n \equiv \frac{1}{2}$, 则式(6)转化为式(4),可得文献[10]的主要结论。

参考文献:

[1] BLUM E, OETTLI W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. Math Student, 1994, 63: 123-145.

[2] CENG L C, YAO J C. A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 214: 186-201.

[3] TAKAHASHI S, ZEMBAYASHI W. Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 331: 506-517.

[4] CENG L C, AL-HOMIDAN S, ANSARI Q H, et al. An iterative scheme for equilibrium problems and fixed point problems of strict pseudo-contraction mappings[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 223: 967-974.

[5] 沈金良, 黄建华. 渐进非扩张映射混合迭代序列的均衡问题和不动点问题[J]. 福州大学学报, 2016, 44(5): 621-626.

[6] SHEN J L, HUANG J H. Hybrid iteration method for generalized equilibrium problems and fixed point problems of a finite family of asymptotically nonexpansive mappings[J]. Annals of Applied Mathematics, 2017, 33(1): 18-31.

[7] 沈金良, 朱胜, 黄建华. 可数族 Bregman 全局拟渐进非扩张映射的均衡问题和强收敛定理[J]. 四川大学学报, 2017, 54(2): 261-267.

[8] XU H K, ALGHAMDI M A, SHAHZAD N. The viscosity technique for the implicit midpoint rule of nonexpansive mappings in Hilbert spaces[J/OL]. Fixed Point Theory and Applications, 2015: 1-12[2021-10-19]. https://fixedpointtheoryandapplications.springeropen.com/articles/10.1186/s13663-015-0282-9. DOI: 10.1186/s13663-015-0282-9.

[9] KE Y F, MA C F. The generalized viscosity implicit rules of nonexpansive mappings in Hilbert spaces[J/OL]. Fixed Point Theory and Applications, 2015: 1-21[2021-10-19]. https://fixedpointtheoryandapplications.springeropen.com/articles/10.1186/s13663-015-0439-6. DOI: 10.1186/s13663-015-0439-6.

[10] 沈金良. 均衡问题和非扩张映射隐中点迭代序列的不动点问题[J]. 宁夏大学学报(自然科学版), 2018, 39(4): 305-308.

[11] 沈金良, 叶静妮, 黄建华. 非扩张映射隐中点黏性迭代序列的逼近问题和均衡问题[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2020, 46(1): 1-7.

[12] COMBETTES P L, HIRSTOAGA S A. Equilibrium problem progamming in Hilbert spaces[J]. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2005, 6: 117-136.

[13] GEOBEL K, KIRK W A. Topics in metric fixed point theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[14] XU H K. An iterative approach to quadratic optimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, 116: 659-678.

[15] XU H K. Iterative algorithms for nonlinear operators[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2002, 66: 240-256.

(责任编辑:周晓南)

Equilibrium Problems and Fixed Point Problems of the Generalized Viscosity Implicit Iteration

SHEN Jinliang*

(Fuzhou University ZhiCheng College, Fuzhou 350002, China)

Abstract: In this paper, we introduce a generalized implicit scheme using the viscosity approximation technique, and study equilibrium problems and fixed point problems of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. We prove that the suggested method converges strongly to a special common element of the solutions of equilibrium problems and the set of fixed points of nonexpansive mappings under some conditions.

Key words: generalized viscosity approximation; implicit iteration; nonexpansive mappings; Hilbert space