文章编号 1000-5269(2020)03-0010-05 DOI:10.15958/j.cnki.gdxbzrb.2020.03.03

抛物随机微分方程的多水平 Monte Carlo 法

向亚红,罗贤兵*

(贵州大学 数学与统计学院,贵州 贵阳 550025)

摘 要:在热传导、化学物质扩散的问题中,常出现带有随机系数的抛物偏微分方程,而求这些随机抛物微分方程的解析解非常困难,因此考虑其数值近似。本文用多水平 Monte Carlo 法和有限差分法相结合来求解抛物随机问题的数值解,与传统的 Monte Carlo 法相比,它的渐近成本显著降低,计算速度显著提高,数值算例检验了该方法的高效性。

关键词:多水平;Monte Carlo 方法;抛物随机偏微分方程;有限差分法

中图分类号:O241.82; O35 **文献标识码**: A

现实生活中很多物理现象都是用微分方程来描述,特别是随机偏微分方程(SPDE)在现代物理学、化学、生物学、经济学等都有很多应用。由于求随机问题的解析解比较困难,于是转而考虑数值解。在处理这类数值问题时,Monte Carlo(MC)法是首选方法, 多水平 Monte Carlo(MLMC)法是 GILES 首先基于多重网格的思想在传统 Monte Carlo 法的基础上提出来的[1],目前渐渐受到了广泛关注。

到目前为止,Monte Carlo 法(包含拟 Monte Carlo 法、多水平 Monte Carlo 法、多水平拟 Monte Carlo 法)在常见的随机椭圆偏微分方程[2-3]的数值解方面已经取得了一些进展。比如 2011 年 CLIFFE 等将 MLMC 法应用在含有随机系数的椭圆偏微分方程,并在数值计算中证明了该方法对地下水流中出现的一维和二维模型问题的有效性[4];BARTH 等于 2011 年采用多水平 Monte Carlo 法数值近似有随机系数的椭圆偏微分方程,并给出了详细的理论分析[5];2011 年 GRAHAM 等利用拟 Monte Carlo 法求解含有随机系数的椭圆偏微分方程[6];2015 年 KUO、SCHWAB,以及 SLOAN 利用多水平拟 Monte Carlo(MLQMC)法结合有限元方法数值求解在带有随机系数的椭圆偏微分方程[7];2016 年 KUO 和 NUYENS 分析了拟 Monte Carlo 法在含有随机系数的椭圆偏微分方程的应用,分别比较了均匀分布与正态分布、单水平算法与多水平算法、一阶拟 Monte Carlo 规则与高阶拟 Monte Carlo 规则,确定的拟 Monte Carlo 法与随机拟 Monte Carlo 法,给出了误差分析的总结,提供了在偏微分方程问题中生成拟 Monte Carlo 点的示例[8];2017 年 KUO 等将对数正态问题的多水平拟 Monte Carlo 方法,应用于随机多孔介质中典型椭圆问题稳态流动解的线性泛函,得出了误差分析,并用数值实验检验[9]。这对于处理地下流动问题的不确定性量化至关重要。

然而,用多水平 Monte Carlo 方法在处理带时间的随机偏微方程数值解的研究较少。本文考虑用多水平 Monte Carlo 方法研究抛物随机微分方程的数值近似。

1 抛物随机偏微分方程

考虑如下带有随机系数的抛物偏微分方程,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t;\omega)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=f, \quad (1)$$

其初始条件为 $u(x,0)=0$,边界条件为 $u(0,t)=a$, $u(1,t)=b$。随机来源可以是系数 $a(x,t;\omega)$,边界 a,b 或者热源项 f。

本文中取 $\log_a(x,t;\omega)$ 满足正态分布,f 满足布朗运动。

收稿日期:2019-11-29

基金项目:国家自然科学基金项目资助(11961008)

作者简介:向亚红(1995-),女,在读硕士,研究方向:不确定量化,Email: 497878069@qq.com.

* **通讯作者**:罗贤兵,Email:xbluo1@gzu.edu.cn.

在应用多水平 Monte Carlo 法求解抛物随机偏微分方程时有以下两步:(I)在随机场 $a(x,t;\omega)$ 进行抽样;(II)利用抽样结果对抛物偏微分方程 (1) 进行空间离散并求解。

1.1　模型分析

将(1)式中的系数 $a(x,t;\omega)$ (传热系数或者扩散系数)视为一个随机场。由于 $a(x,t;\omega)$ 在实际生活中一定为非负数,因此可以假定 $a(x,t;\omega)$ 满足对数正态随机场。即:

$$a(x,t;\omega)=\exp Z(x,t;\omega)。\tag{2}$$

式中: $Z(x,t;\omega)$ 为有特定连续协方差函数的零均值高斯场; ω 为概率空间 (Ω,F,P) 中的随机变量,在本文中 Z 满足式(3):

$$\operatorname{cov}[Z(x_1,t;\omega),Z(x_2,t;\omega)]=\rho(x_1-x_2)$$
$$E[Z(x,t;\omega)]=0。\tag{3}$$

在实际应用中协方差函数有多种选择,一种常用的是 Matèrn 协方差[10]:

$$C_v(d)=\sigma^2\frac{2^{1-v}}{\Gamma(v)}\left(\sqrt{2v}\,\frac{d}{\lambda}\right)K_v\left(\sqrt{2v}\,\frac{d}{\lambda}\right)。\tag{4}$$

式中: K_v 为第二类修正 Bessel 函数, λ 和 v 为非负参数,当 $v=\frac{1}{2}$ 时, $C_{1/2}(d)=\sigma^2\exp\left(-\frac{d}{\lambda}\right)$, 当 $v=+\infty$时, $C_{+\infty}(d)=\sigma^2\exp\left(-\frac{d}{2\lambda^2}\right)$; $d=\|x_1-x_2\|_p$, $x_1,x_2\in D$; $\|\cdot\|_p$ 为 R^d 上的 l_p 范数,一般取 $p=1$ 或 $p=2$,本文中为了简单起见取 $p=1$;参数 σ^2 和 λ 为协方差函数的方差和相关尺度。由 Kolmogorov 定理[11] $a(\cdot,\omega)\in C^{0,\alpha}(D)$ 且 $\alpha<1/2$。

1.2　抽样

随机场的生成有多种方法,包括循环嵌入[6]、Karhunen-Loève (KL)展开[10,12]或者矩阵分解[6]。本文介绍 Karhunen-Loève (KL)展开和矩阵分解。

1.2.1　Karhunen-Loève (KL)展开

令 $Z(x,t;\omega)=\log_a(x,t;\omega)$,则 Z 可以由一系列独立同分布零均值随机变量 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 展开,

$$Z(x,t;\omega)=E[Z(x,t,\cdot)]+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\theta_n}\xi_n(\omega)b_n(x)。\tag{5}$$

式中 :$\{\theta_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 和 $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 为定义的协方差函数的特征值和特征函数,特征值为一组递减序列,即 $\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots$,特征函数 $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 正交且可以归一化; $\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 为独立同分布的标准正态随机变量。在实际应用中我们将 KL 展开进行截段:

$$Z(x,t;\omega)\approx Z_{N_{\mathrm{KL}}}(x,t;\omega)=E[Z(x,t,\cdot)]+\sum_{n=1}^{N_{\mathrm{KL}}}\sqrt{\theta_n}\xi_n(\omega)b_n(x),\tag{6}$$

那么对于 KL 展开的截断均方误差为:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2_{N_{\mathrm{KL}}}&=E[\|Z-Z_{N_{\mathrm{KL}}}\|^2_{L^2(D)}]\\&=E\left[\left\|\sum_{i=N_{\mathrm{KL}}}\sqrt{\theta_i}b_i(x)\xi_i(\omega)\right\|^2_{L^2(D)}\right]\\&=\sum_{i,j>N_{\mathrm{KL}}}\sqrt{\theta_i\theta_j}(b_i(x),b_j(x))E[\xi_i,\xi_j]\\&=\sum_{i,j>N_{\mathrm{KL}}}\sqrt{\theta_i\theta_j}\delta_{ij}\delta_{ij}\\&=\sum_{i>N_{\mathrm{KL}}}\theta_i。\end{aligned}\tag{7}$$

由于特征值 $\{\theta_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 为单调递减序列,因此,当 N_{KL} 足够大时,KL 展开的截断误差就会很小。

1.2.2　矩阵分解

另一种生成随机场的方法是矩阵分解,由于随机变量 Z 满足零均值高斯分布, 它有正定协方差矩阵:

$$\boldsymbol{R}=E(ZZ^{\mathrm{T}})。\tag{8}$$

则可以通过主成分分析(PCA)、Cholesky 或者其他分解方法将矩阵 $\boldsymbol{R}$ 分解为:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}。\tag{9}$$

由于, $E[ZZ^{\mathrm{T}}]=E[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{A}E[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}$, 则, $Z(\omega)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(\omega)$。

其中: $\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 为独立的标准正态随机变量。

2　多水平 Monte Carlo 法

2.1　Monte Carlo 法

Monte Carlo 方法是利用随机生成一系列的样本数,将随机问题转变成确定问题来进行计算,在数值模拟和积分计算中有很广泛的应用[11]。在随机模型中,对于概率空间 (Ω,F,P) 上的一个随机变量 Q , 可以用 (Ω,F,P) 上 N 个独立同分布的样本均值来近似,

$$E[Q]\approx\hat{Q}^{\mathrm{MC}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{Q}(\omega_i)。\tag{11}$$

其中:$\{\omega_i\}$ 为概率空间 (Ω,F,P) 上 N 个独立同分布的随机抽样,其误差为:

$$\begin{aligned}e&=E[Q]-\hat{Q}^{\mathrm{MC}}\\&=E[Q]-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Q(\omega_i)。\end{aligned}\tag{12}$$

因此,均方误差(MSE)为:

$$
\begin{aligned}
e_{\mathrm{MC}}^2 &= E[(E[Q] - \sum_{i=1}^{N} Q(\omega_i))^2] \\
&= E[E^2[Q] - \sum_i \frac{2E[Q]}{N} Q_i + (\frac{1}{N}\sum_i Q_i)^2] \\
&= E[E^2[Q] - \sum_i \frac{2E[Q]}{N} Q_i + \\
&\quad \frac{1}{N^2}\sum_i (Q_i)^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j} Q_i Q_j] \\
&= E^2[Q] - 2E^2[Q] + \frac{1}{N}E[Q^2] + \\
&\quad \frac{N(N-1)}{N^2}E^2[Q] \\
&= \frac{E[Q^2] - E^2[Q]}{N} \\
&= \frac{V[Q]}{N}。
\end{aligned} \tag{13}
$$

由(13)式可以看出误差与 Q 的方差成正比例相关,因此,为了减少误差就要想办法降低 Q 的方差。而多水平 Monte Carlo 方法就可以达到减少方差的目的。

在应用 Monte Carlo 方法求解抛物随机偏微分方程的过程中,需要将方程进行数值离散,那么随机变量 Q 即为关于方程真解的线性或非线性泛函,Q 为方程数值解对应的线性或非线性泛函。

2.2 多水平 Monte Carlo 方法

多水平 Monte Carlo 方法[13]的思想就是用一组收敛精度单调递增的序列 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_{L-1}$ 来逼近 Q_L,在求解抛物随机偏微分方程中,取单调递减的空间离散步长 $\{h_l : l = 0,1,\cdots,L\}$,也就是说,$h_0 < h_1 < \cdots < h_L$,本文取 $h_l = 0.5h_{l-1}$,$l = 1,\cdots,L$。在计算每一水平上的样本时,要同时用到较细水平网格和较粗水平网格,即:

$$
\begin{aligned}
E[Q_L] &= E[Q_0] + \sum_{l=1}^{L} E[Q_l - Q_{l-1}] \\
&\approx N_0^{-1}\sum_{n=1}^{N_0} Q_0(\omega_{i,0}) + \\
&\quad \sum_{l=1}^{N_0}\Big[N_l^{-1}\sum_{n=1}^{N_l}(Q_l(\omega_{i,l}) - Q_{l-1}(\omega_{i,l}))\Big]。
\end{aligned} \tag{14}
$$

式中:l 为不同层次的水平,$N_l(l = 0,1,\cdots,l)$ 为 l 水平对应的抽样样本数。

由(3)式右侧可以看出 $Q_l(\omega_{i,l}) - Q_{l-1}(\omega_{i,l})$ 的值在 $l, l-1$ 两层上使用相同的抽样 $\omega_{i,l}$。假设计算样本 Q_0 的成本和方差分别为 C_0, V_0 对应 l 层 $Q_l - Q_{l-1}$ 的成本和方差为 C_l, V_l。因此多水平 Monte Carlo 方法的总计算成本和总方差分别为 $\sum_{l=0}^{L} N_l C_l$ 和 $\sum_{l=0}^{L} C_l V_l$。

令 $Y_0 = Q_0, Y_l = Q_l - Q_{l-1}$,则,$E[Q_L] = \sum_{l=0}^{L} E[Y_l]$。令 $\hat{Y}$ 是 $E[Y_l]$ 的一个无偏估计,则:

$$
\hat{Y}_0 = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} Q_0(\omega_{i,0}), \tag{15}
$$

$$
\hat{Y}_l = \frac{1}{N_l}\sum_{=1}^{N_l}(Q_l(\omega_{i,l}) - Q_{l-1}(\omega_{i,l})),\ l = 1,2,3,\cdots,L。 \tag{16}
$$

所以多水平上的方差估计为 $V[\hat{Q}_L^{\mathrm{ML}}] = \sum_{l=0}^{L} \hat{Y}_l$,最细水平网格的估计期望等于最粗水平网格的估计期望加上相邻水平估计之间的差异期望。多水平的思想是独立地估计每一个期望,使得对于固定的计算成本,总体方差得到最小化。类似 Monte Carlo,多水平 Monte Carlo 均方误差为:

$$
\begin{aligned}
e(\hat{Q}_L^{\mathrm{ML}})^2 &= E[(\hat{Q}_L^{\mathrm{ML}} - E[Q])^2] \\
&= E[(\hat{Q}_L^{\mathrm{ML}} - E[\hat{Q}_L^{\mathrm{ML}}] + E[\hat{Q}_L^{\mathrm{ML}}] - E[Q])^2] \\
&= E[(\sum_{l=0}^{L}\hat{Y}_l - E[\sum_{l=0}^{L}\hat{Y}_l] + E[\hat{Q}_L^{\mathrm{ML}}] - E[Q])^2] \\
&= V[\sum_{l=0}^{L}\hat{Y}_l] + ([\hat{Q}_L^{\mathrm{ML}} - Q])^2 \\
&= \sum_{l=0}^{L} N_l^{-1} V[\hat{Y}_l] + ([\hat{Q}_L^{\mathrm{ML}} - Q])^2。
\end{aligned} \tag{17}
$$

可以得出,类似前面的 MC 情况,均方误差包含两部分,估计的方差和近似误差。如果想要根均方误差(RMSE)达到 ε,就意味着均方误差(MSE)不能超过 ε^2,那么需要:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{L} N_l^{-1} V[\hat{Y}_l] \leqslant \varepsilon^2/2; \\
&[E(\hat{Q}_L^{\mathrm{ML}} - Q)^2] \leqslant \varepsilon^2/2。
\end{aligned} \tag{18}
$$

多水平 Monte Carlo 方法近似的计算成本是 $C(\hat{Q}_L^{\mathrm{ML}}) = \sum_{l=0}^{L} N_l C_l$,$C_l$ 是 l 层每个样本的计算成本。对于固定的计算成本依旧满足方差临界条件(18),应用拉格朗日乘子算法,方差最小时的最优样本数为,

$$
N_l = \lceil 2\varepsilon^{-2}\sqrt{(V[Y_l]/C_l)}\Big(\sum_{l=0}^{L}\sqrt{V[Y_l]C_l}\Big)\rceil, \tag{19}
$$

这个等式可以保证多水平估计的估计方差不超过 $\varepsilon^2/2$,为了实现均方误差不超过 ε^2,还需要保证 $|E[\hat{Q} - Q_L]| < \varepsilon/\sqrt{2}$。如果 $|E[Q_l - Q]| = O(2^{-\alpha l})$,

则相应误差为:

$$E[Q - Q_L] = \sum_{l=L+1}^{\infty} E[Q_l - Q_{l-1}] \qquad (20)$$
$$= E[Q_L - Q_{L-1}]/(2^{\alpha} - 1),$$

由此可以推出收敛检验 $E[Q_L - Q_{L-1}]/(2^{\alpha} - 1) < \varepsilon/\sqrt{2}$。每个水平上估计的方差精度取决于样本集的大小。如果样本集太小,估计方差可能就会不好。

给定不同的误差精度 ε,使用 Giles 的 MLMC 算法[1,14]:

(1) $L = 2$,初始化 0,1,2 层上的样本数;

(2) 计算每层还需要的样本数;

(3) 计算并更新方差 $V_l, l = 0,1,\cdots,L$;

(4) 通过(19)式计算最有样本数 N_l, $l = 0,1,\cdots,L$;

(5) 检验是否达到所要的收敛精度;

(6) 如果未达到所要收敛精度,返回第(2)步。

3　数值算例

有很多种方法来空间离散模型(1),例如有限差分方法、混合有限元方法或者有限体积法都可以达到目的。本文就有限差分方法进行阐述。

首先在时间上采用时间步长为 k 的 Euler-Maruyama 离散[15],在空间区间[0,1]取步长为 h 的均匀网格,则模型(1)的离散如下:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{k}{h^2}[a_{j+\frac{1}{2}}^n(u_{j+1}^n - u_j^n) - a_{j-\frac{1}{2}}^n(u_j^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n)] + f_j^n,$$

在 l 水平上的空间和时间步长分别为:$h_l = 2^{-(l+1)}$, $k_l = \frac{1}{4}h_l^2$。

输出量 $Q = \int u^2(x,0.25)$, f 满足布朗运动。应用 MLMC 算法计算模型(1)在一维情况 $D = (0,1)$ 时 Q 的近似,其数值结果如图 1 所示,图 1 显示了 $\lambda = 0.01$, $\sigma^2 = 1$ 时的结果。正如 Giles 的定理[1],假设存在正常数 α, β。

(a)图画的是每一个 l 水平上的 Q_l 以及 $Y_l = Q_l - Q_{l-1}$ 的方差。图中 $V[Y_l]$ 曲线的斜率近似等于 -3.89, 也就是说, $V[Y_l] = O(2^{-3.89}) = O(h^{3.89})$, $\beta \approx 3.89$。

(b)图画的是每个 l 水平上的 Q_l 以及 $Y_l = Q_l - Q_{l-1}$ 的期望,图中显示曲线 $E[Q_l - Q_{l-1}]$ 的斜率近似等于-1.07,也就是说 $E[Q_l - Q_{l-1}] = O(2^{-1.07}) = O(h^{1.07})$, $\alpha \approx 1.07$。

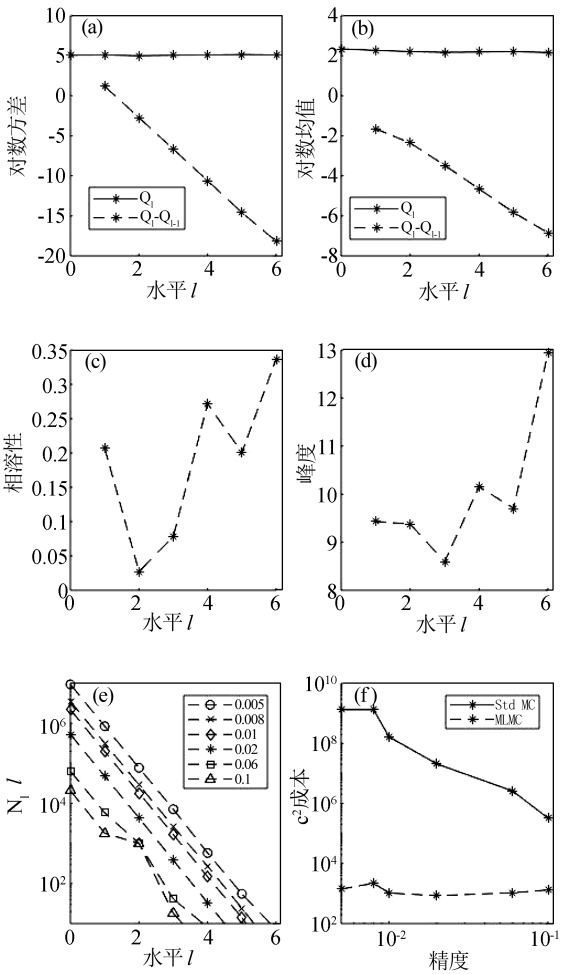

图 1　$\lambda = 0.01$, $\sigma^2 = 1$ **时的输出结果**

Fig.1　**The output result of** $\lambda = 0.01$, $\sigma^2 = 1$

(c)图和(d)显示的是 MLMC 算法的相容性和峰度,相容性要求 MLMC 算法需满足,

$$P\left(\frac{|\hat{Y}_l - \hat{Q}_l + \hat{Q}_{l-1}|}{3\left(\sqrt{V[\hat{Y}_l]} + \sqrt{V[\hat{Q}_l]} + \sqrt{V[\hat{Q}_{l-1}]}\right)} \geqslant 1\right) \leqslant 0.3\%。$$

峰度则显示在计算 $V[Y_l]$ 时需要多少样本。零均值的随机变量 X 的样本方差可以由 $\sqrt{(k-1)/N}[X^2]$ 近似推导, 峰度 $k = E[X^4]/(E[X^2])^2$,因此需要的样本数为 $O(k)$。

(e)图和(f)图分别为不同精度条件下不同 l 水平上所需要的样本数,以及 MLMC 和 MC 计算时的成本比较。由图可知 $\gamma \approx 2.80$。MLMC 的计算成本为, $C(\hat{Q}^{\mathrm{ML}}) = \sum_{l=0}^{L} N_l C_l$, 传统 MC 方法的计算成本为, $C(\hat{Q}^{\mathrm{MC}}) = N_L^* C_L^*$。其中, $N_L^* = 2\varepsilon^{-2}V[Q_L]$。由于在 MLMC 方法中计算 $Y_l = Q_l - Q_{l-1}$ 时与两个

水平有关,因此 l 水平上 MLMC 的计算成本 C_l 和 MC 的计算成本 C_l^* 不相同。因为 $E[Y_l] \propto 2^{-\alpha l}$ 且 $E[Y_l] \propto \varepsilon$,所以 $h \propto \varepsilon^{\frac{1}{2\alpha}}$,同时 $C_l \propto 2^{-2\gamma l} \propto h^{-2\gamma}$。对于传统 MC 方法有,$C_l \propto \varepsilon^{-\frac{\gamma}{\alpha}}$,$N \propto \varepsilon^{-2}$ 那么理论上可以得出 $C^{\mathrm{MC}} \propto \varepsilon^{-\left(2+\frac{\gamma}{\alpha}\right)} = \varepsilon^{-\left(2+\frac{2.80}{1.07}\right)} = \varepsilon^{-4.62}$。对于 MLMC 方法,由文献[1]的定理 3.1 可知:

$$C^{\mathrm{ML}} \propto \begin{cases} \varepsilon^{-2} & \beta > \gamma \\ \varepsilon^{-2}(\log \varepsilon)^2 & \beta = \gamma \\ \varepsilon^{-\left(2+\frac{\gamma-\beta}{\alpha}\right)} & \beta < \gamma \end{cases} 。 \quad (21)$$

论文数值算例中 $\beta > \gamma$,因此 $C^{\mathrm{ML}} \propto \varepsilon^{-2}$。由此可以看出,传统 MC 方法需要多花 $10^{4.62}$ 个工作量,而 MLMC 方法额外需要 10^2 个工作量,占传统 MC 方法的成本比为 0.002,可见计算成本得到很大缩减。

4 总结及展望

通过数值模拟观察 α,β 的值,我们成功将 MLMC 算法应用到带有随机系数的抛物偏微分方程中,通过数值结果可以明显看出对于这种类型的模型问题输出量的估计,MLMC 方法具有明显的优势。

在本文中仅用一个参数 l 来表示离散水平,多指数 Monte Carlo(MIMC)方法是 MLMC 方法的一个扩展,离散水平 $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \cdots, l_d)$ 是一个向量。另一个是 MC 方法是随机生成样本 $\{\omega_i\}$ 来计算输出量 Q,而 QMC 方法在生成样本数时更均匀,可以覆盖所有范围,从而计算效果更好。在以后的工作中还可以用 MIMC 方法和 MLQMC 方法应用在抛物随机偏微分方程上。

参考文献:

[1] GILES M B. Multi-level monte carlo path simulation[M]. England: INFORMS, 2008.

[2] HAJI-ALI A L, NOBILE F, SCHWERIN E V, et al. Optimization of mesh hierarchies in multilevel monte carlo samplers[J]. Stochastics & Partial Differential Equations Analysis & Computations, 2016, 4(1): 76-112.

[3] TECKENTRUP A L, SCHEICHL R, GILES M B, et al. Further analysis of multilevel Monte Carlo methods for elliptic PDEs with random coefficients[J]. Numerische Mathematik, 2013, 125(3): 569-600.

[4] CLIFFE K A, GILES M B, SCHEICHL R, et al. Multilevel Monte Carlo methods and applications to elliptic PDEs with random coefficients[J]. Computing and Visualization in Science, 2011, 14(1): 3-15.

[5] BARTH A, SCHWAB C, ZOLLINGER N. Multi level Monte Carlo finite element method for elliptic PDEs with stochastic coefficients[J]. Numerische Mathematik, 2011, 119(1): 123-161.

[6] GRAHAM I G, KUO F Y, NUYENS D, et al. Quasi Monte Carlo methods for elliptic PDEs with random coefficients and applications[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230 (10): 3668-3694.

[7] KUO F Y, SCHWAB C, SLOAN I H. Multi level Quasi Monte Carlo finite element methods for a Class of elliptic PDEs with random coefficients[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2015, 15(2): 411-449.

[8] KUO F Y, NUYENS D. Application of Quasi Monte Carlo methods to elliptic PDEs with random diffusion coefficients: a survey of analysis and implementation[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2016, 16(6): 1631-1696.

[9] KUO F Y, SCHEICHL R, SCHWAB C, et al. Multilevel Quasi Monte Carlo methods for lognormal diffusion problems[J]. Mathematics of Computation, 2017, 86(308): 2827-2860.

[10] ADLER R J. The geometry of random fields[M]. New York: Wiley, 1981.

[11] CAFLISCH R E, RUSSEL E. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo methods[J]. Acta Numerica, 1998, 7: 1-49.

[12] SCHWAB C, TODOR R A. Karhunen-Loève approximation of random fields by generalized fast multipole methods[J]. Comput. Phys, 2006, 217(1): 100-122.

[13] GILES M B. Multilevel Monte Carlo methods[J]. Acta Numerica, 2015, 24(3): 259-328.

[14] GILES M B. Improved multilevel Monte Carlo convergence using the milstein scheme[M]. New York: Springer, 2008.

[15] COLLIER N, HAJI-ALI A L, NOBILE F, et al. A continuation multilevel Monte Carlo algorithm[J]. Numer Math, 2015, 55: 399-432.

(责任编辑:于慧梅)

(下转第 41 页)