文章编号 1000-5269(2020)03-0001-05 DOI:10.15958/j.cnki.gdxbzrb.2020.03.01

具有广义 C-凸性的一类分式规划的对偶

李 钰[1*],严建军[1,2],李江荣[1]

(1. 延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000; 2. 延安职业技术学院,陕西 延安 716000)

摘 要:基于广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-凸函数,广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-伪凸函数和广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-拟凸函数等,探讨了涉及这些新广义凸性的一类多目标半无限分式规划的 Mond-Weir 型对偶,得到了相关的弱对偶定理和强对偶定理,并进行了证明。

关键词:分式规划;广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-凸函数;对偶性

中图分类号:O224 **文献标识码**: A

近年来,随着凸性理论在优化领域的广泛应用,涌现出丰硕的研究成果。文献[1-6]提出了 (C,α,ρ,d)-凸函数,并对包含此类凸性的多目标、分式规划等问题的最优性条件与对偶性定理进行了研究。受上述文献启示,作者结合文献[7-8]中提出的广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-凸性,讨论了一类多目标半无限分式规划的 Mond-Weir 型对偶问题。

1 基本概念

定义 1[1] 称函数 $C:X\times X\times \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上关于第三个变元是凸的,若 $\forall (x,x^0)\in X\times X$, $\forall y_1, y_2\in \mathbf{R}^n$,有

$C_{(x,x^0)}(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\leqslant \lambda C_{(x,x^0)}(y_1)+(1-\lambda)C_{(x,x^0)}(y_2)$, $\forall \lambda\in(0,1)$。

在文中,均假设 $\forall (x,x^0)\in X\times X$,有 $C_{(x,x^0)}(0)=0$。

定义 2[1] 设函数 $f:X\to \mathbf{R}$ 是局部 Lipschitz 函数,若 $\exists\ \alpha:X\times X\to \mathbf{R}_+\backslash\{0\}$, $\rho\in\mathbf{R}$, $d:X\times X\to \mathbf{R}_+$,如果 $\forall x\in X$,有

$(f(x)-f(x^0))/\alpha(x,x^0)\geqslant C_{(x,x^0)}(\xi)+\rho d(x,x^0)/\alpha(x,x^0)$, $\forall \xi\in \partial f(x^0)$,

则称函数 f 在 x^0 处是 (C,α,ρ,d)-凸函数。

定义 3[7-8] 设实向量值函数 $f:X\to \mathbf{R}^p$ 的每个分量 f_i 是局部 Lipschitz 连续函数,若存在函数 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_i:X\times X\to \mathbf{R}_+\backslash\{0\}$, $b_i:X\times X\times[0,1]\to \mathbf{R}_+$, $b_i=b_i(x,x^0,\lambda)$, $b_i(x,x^0)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}b_i(x,x^0,\lambda)$, $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_p)^{\mathrm{T}}$, $\rho_i\in\mathbf{R}$, $d_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $(d_i(0)=0)$, $\theta_i:X\times X\to\mathbf{R}_+$, $(x=x^0,\theta_i(x,x^0)=0)$, $C:X\times X\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 和局部渐近锥 K,如果 $\forall x\in X$, $i=1,\cdots,p$,有

$b_i(x,x^0)\varphi(f_i(x)-f_i(x^0))\geqslant\alpha_i(x,x^0)C_{(x,x^0)}(\xi_i)+\rho_i d^2(\theta_i(x,x^0))$, $\forall \xi_i\in\partial^K f_i(x^0)$,

则称函数 $f=(f_1,\cdots,f_p)$ 在 $x^0\in X$ 处是广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-凸函数。

如果函数 f 在 X 上每一点处为广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-凸函数,则称 f 在 X 上是广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-凸函数。

定义 4[7-8] 设实向量值函数 $f:X\to\mathbf{R}^p$ 的每个分量 f_i 是局部 Lipschitz 连续函数,若存在函数 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_i:X\times X\to\mathbf{R}_+\backslash\{0\}$, $b_i:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}_+$, $b_i=b_i(x,x^0,\lambda)$, $b_i(x,x^0)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}b_i(x,x^0,\lambda)$, $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_p)^{\mathrm{T}}$, $\rho_i\in\mathbf{R}$, $d_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $(d_i(0)=0)$, $\theta_i:X\times X\to\mathbf{R}_+$, $(x=x^0,\theta_i(x,x^0)=0)$, $C:X\times X\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 和局部渐近锥 K,如果 $\forall x\in X$, $(x\neq x^0,)$ $i=1,\cdots,p$,有

$b_i(x,x^0)\varphi(f_i(x)-f_i(x^0))<(\leqslant)0\Rightarrow\alpha_i(x,x^0)C_{(x,x^0)}(\xi_i)+\rho_i d^2(\theta_i(x,x^0))<0$, $\forall\xi_i\in\partial^K f_i(x^0)$,

则称函数 $f=(f_1,\cdots,f_p)$ 在 $x^0\in X$ 处是广义

收稿日期:2020-01-11

基金项目:国家自然科学基金项目资助(61763045);陕西省教育厅科研计划项目资助(17JK0872);延安市科技计划项目资助(2016KS-01);延安大学科研基金项目资助(YDQ2016-21);2017 年陕西省大学生创新创业训练计划项目资助(1576)

作者简介:李 钰(1982-),女,副教授,硕士生导师,研究方向:最优化理论与应用研究,Email:jsjxy419@126.com.

*通讯作者:李 钰,Email:jsjxy419@126.com.

$(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-(严格)伪凸函数。

如果函数 f 在 X 上每一点处为广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-(严格)伪凸函数,则称 f 在 X 上是广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-(严格)伪凸函数。

定义 5[7-8] 设实向量值函数 $f:X\to\mathbf{R}^p$ 的每个分量 f_i 是局部 Lipschitz 连续函数,若存在函数 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_i:X\times X\to\mathbf{R}_+\backslash\{0\}$, $b_i:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}_+$, $b_i=b_i(x,x^0,\lambda)$, $b_i(x,x^0)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}b_i(x,x^0,\lambda)$, $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_p)^{\mathrm{T}}$, $\rho_i\in\mathbf{R}$, $d_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $(d_i(0)=0)$, $\theta_i:X\times X\to\mathbf{R}_+$, $(x=x^0,\theta_i(x,x^0)=0)$, $C:X\times X\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 和局部渐近锥 K,如果 $\forall x\in X$, $i=1,\cdots,p$,有

$$b_i(x,x^0)\varphi(f_i(x)-f_i(x^0))\leqslant(<)0\Rightarrow\alpha_i(x,x^0)C_{(x,x^0)}(\xi_i)+\rho_i d^2(\theta_i(x,x^0))\leqslant0,\ \forall\xi_i\in\partial^K f_i(x^0),$$

则称函数 $f=(f_1,\cdots,f_p)$ 在 $x^0\in X$ 处是广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-(弱)拟凸函数。

如果函数 f 在 X 上每一点处为广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-(弱)拟凸函数,则称 f 在 X 上是广义 $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-(弱)拟凸函数。

对于下述规划:

$$\text{(MSIFP)}\quad \min\ \frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)},\cdots,\frac{f_p(x)}{g_p(x)}\right)\quad \text{s.t.}\ h_j(x)\leqslant0,\ j\in J,$$

其中,局部 Lipschitz 连续函数 $f_i,g_i:\tilde{X}\to\mathbf{R}$, $i=1,\cdots,p$, $h_j:\tilde{X}\to\mathbf{R}$, $j\in J$, J 为无限可数集, $\varphi\neq\tilde{X}\subset\mathbf{R}^n$ 为开集。记 $X=\{x\in\tilde{X}\mid h_j(x)\leqslant0,j\in J\}$, $I=\{j\in J\mid h_j(x^0)=0\}$ 是一主动约束集, $\mathbf{R}_+^{(J)}=\{\mu:J\to\mathbf{R}_+\mid\forall j\in J,$仅有有限个$\mu_j\neq0\}$。文中假定对所有 $x\in\tilde{X}$,有 $f_i(x)\geqslant0$, $g_i(x)>0$, $i=1,\cdots,p$。

记 $\Lambda^+=\{(\lambda=\lambda_1,\cdots,\lambda_p)\mid\lambda_i\geqslant0,\text{且}\sum\limits_{i=1}^p\lambda_i=1\}$,

$\Lambda^{++}=\{(\lambda=\lambda_1,\cdots,\lambda_p)\mid\lambda_i>0,\text{且}\sum\limits_{i=1}^p\lambda_i=1\}$。

考虑(MSIFP)的 Mond-Weir 型对偶:

$$\text{(MSIFD)}\quad \max\ \frac{f(y)}{g(y)}\quad \text{s.t.}\ 0\in\partial^K\left[\sum_{i=1}^p(\lambda_i\frac{f_i(y)}{g_i(y)})\right]+\sum_{j\in J}\sigma_j\partial^K h_j(y),\ \sigma_j h_j(y)\geqslant0,\ j\in J,$$

$\lambda\in\Lambda^+$, $(\sigma_j)_{j\in J}\in\mathbf{R}_+^{(J)}$。

记(MSIFD)的可行解集为 $S=\{(y,\lambda,\sigma)\mid0\in\partial^K\left[\sum\limits_{i=1}^p(\lambda_i\frac{f_i(y)}{g_i(y)})\right]+\sum\limits_{j\in J}\sigma_j\partial^K h_j(y)$, $\sigma_j h_j(y)\geqslant0,j\in J$, $\lambda\in\Lambda^+$, $(\sigma_j)_{j\in J}\in\mathbf{R}_+^{(J)}\}$。

2 主要结果

定理 1(弱对偶) 设 $x\in X$, $(y,\lambda,\sigma)\in S$,若 $\lambda_i\geqslant0$, $i=1,\cdots,p$, $(\sigma_j)_{j\in J}\in\mathbf{R}_+^{(J)}$, $\exists C$, α, β, δ, b_1, b_2, φ_1, φ_2, $\rho_1\in\mathbf{R}$, $\rho_2\in\mathbf{R}^{(J)}$, d, θ 和局部渐近锥 K,有

(i) $\frac{f}{g}$ 在 y 处是广义 $(C,\alpha,\rho_1,d)_{K,\theta}$-凸函数。

(ii) 对于 $j\in J(y)$, h 在 y 处是广义 $(C,\beta,\rho_2,d)_{K,\theta}$-凸函数。

(iii) 广义 Slater 条件成立,即 $x^0\in X$,有 $h_{j_0}(x^0)<0$, $j_0\in J(y)$,且 $\sigma_{j_0}>0$。

(iv) $\alpha_1=\cdots=\alpha_p=\beta_1=\cdots=\beta_{(J)}=\delta$。

(v) $b_1(x,y)>0$, $b_2(x,y)>0$;若 $a\leqslant0$,则 $\varphi_1(a)\leqslant0$;若 $a<0$,则 $\varphi_2(a)<0$。

(vi) $\sum\limits_{i=1}^p\lambda_i\rho_{1_i}d^2(\theta_i(x^0,y))+\sum\limits_{j\in J}\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_j(x^0,y))\geqslant0$,

则 $\frac{f(x)}{g(x)}\not\leqslant\frac{f(y)}{g(y)}$。

证明 如果 $\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\frac{f(y)}{g(y)}$,有

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)}\leqslant\frac{f_i(y)}{g_i(y)},$$

且 $\exists i_0$, $1\leqslant i_0\leqslant p$, $i\neq i_0$,使

$$\frac{f_{i_0}(x)}{g_{i_0}(x)}<\frac{f_{i_0}(y)}{g_{i_0}(y)},$$

据(i)和(v),得

$$b_{1_i}(x,y)\varphi_1\left(\frac{f_i(x)}{g_i(x)}-\frac{f_i(y)}{g_i(y)}\right)\geqslant\alpha_i(x,y)C_{(x,y)}(\xi_i)+\rho_{1_i}d^2(\theta_i(x,y)),\ \forall\xi_i\in\partial^K\left(\frac{f_i(y)}{g_i(y)}\right),$$

则

$$\alpha_i(x,y)C_{(x,y)}(\xi_i)+\rho_{1_i}d^2(\theta_i(x,y))\leqslant0,\ \forall\xi_i\in\partial^K\left(\frac{f_i(y)}{g_i(y)}\right),$$

因为 $\lambda\in\Lambda^+$,所以

$$C_{(x,y)}\Big(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(x,y)\lambda_i\xi_i\Big)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\rho_{1_i}d^2(\theta_i(x,y))\leqslant 0,$$

$$\forall\xi_i\in\partial^K\left(\frac{f_i(y)}{g_i(y)}\right),$$

当 $x^0\in X$, 有

$$C_{(x^0,y)}\Big(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(x^0,y)\lambda_i\xi_i\Big)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\rho_{1_i}d^2(\theta_i(x^0,y))\leqslant 0,$$

$$\forall\xi_i\in\partial^K\left(\frac{f_i(y)}{g_i(y)}\right),\tag{1}$$

由(iii), 可得

$$h_{j_0}(x^0)<0=h_{j_0}(y),\ j_0\in J(y),$$

即有

$$h_{j_0}(x^0)-h_{j_0}(y)<0,$$

又由(v), 知

$$b_{2_{j_0}}(x^0,y)\varphi_2(h_{j_0}(x^0)-h_{j_0}(y))<0,$$

由(ii), 有

$$\beta_{j_0}(x^0,y)C_{(x^0,y)}(\zeta_{j_0})+\rho_{2_{j_0}}d^2(\theta_{j_0}(x^0,y))<0,$$

$$\forall\zeta_{j_0}\in\partial^K h_{j_0}(y),$$

用 $\sigma_{j_0}>0$ 乘以上式, 有

$$\beta_{j_0}(x^0,y)C_{(x^0,y)}(\sigma_{j_0}\zeta_{j_0})+\sigma_{j_0}\rho_{2_{j_0}}d^2(x^0,y)<0,$$

$$\forall\zeta_{j_0}\in\partial^K h_{j_0}(y),\tag{2}$$

因 $\sigma_j\geqslant 0, j\in J(y), j\neq j_0$ 及第二个约束条件, 得

$$h_j(x^0)\leqslant 0\leqslant h_j(y),$$

又由(v)和(ii)可知, $\forall\zeta_j\in\partial^K h_j(y)$, 有

$$\beta_j(x^0,y)C_{(x^0,y)}(\sigma_j\zeta_j)+\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_j(x^0,y))\leqslant 0,$$

$j\in J(y), j\neq j_0$,

当 $j\in J(y)$ $(j\neq j_0)$ 时,对上式求和, 得

$$\sum_{j\in J(y),j\neq j_0}\beta_j(x^0,y)C_{(x^0,y)}(\sigma_j\zeta_j)+\sum_{j\in J(y),j\neq j_0}\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_j(x^0,y))\leqslant 0,\tag{3}$$

当 $j\in J\backslash J(y)$ 时, 令 $\sigma_j=0$, 有

$$\sum_{j\in J\backslash J(y)}\beta_j(x^0,y)C_{(x^0,y)}(\sigma_j\zeta_j)+\sum_{j\in J\backslash J(y)}\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_j(x^0,y))=0,\tag{4}$$

将式(1)—(4)相加, 结合函数 C 的凸性和(iv), 可得

$$\delta(x^0,y)C_{(x^0,y)}\Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\xi_i+\sum_{j\in J}\sigma_j\zeta_j\Big)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\rho_{1_i}d^2(\theta_i(x^0,y))+\sum_{j\in J}\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_j(x^0,y))<0,$$

由(vi), 知

$$\delta(x^0,y)C_{(x^0,y)}\Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\xi_i+\sum_{j\in J}\sigma_j\zeta_j\Big)<-\Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\rho_{1_i}d^2(\theta_i(x^0,y))+\sum_{j\in J}\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_j(x^0,y))\Big)\leqslant 0,$$

这与(MSIFD)的第一个约束条件矛盾! 所以

$$\frac{f(x)}{g(x)}\not\leqslant\frac{f(y)}{g(y)}.$$

定理 2(弱对偶)　设 $x\in X$, $(y,\lambda,\sigma)\in S$, 若 $\lambda\in\Lambda^{++}$, $(\sigma_j)_{j\in J}\in\mathbf{R}_+^{(J)}$, $\exists C$, α, β, δ, b_1, b_2, φ_1, φ_2, $\rho_1\in\mathbf{R}$, $\rho_2\in\mathbf{R}^{(J)}$, d, θ_1, θ_2 和局部渐近锥 K, 有

(i) $\lambda^{\mathrm{T}}\left(\frac{f}{g}\right)$ 在 y 处是广义 $(C,\alpha,\rho_1,d)_{K,\theta_1}$-伪凸函数。

(ii) 当 $j\in J(y)$ 时, h 在 y 处是广义 $(C,\beta,\rho_2,d)_{K,\theta_2}$-拟凸函数。

(iii) $\alpha=\beta_1=\cdots=\beta_{(J)}=\delta$。

(iv) $b_1(x,y)>0, b_2(x,y)>0$; 若 $a<0$, 则 $\varphi_1(a)<0$, 若 $a\leqslant 0$, 则 $\varphi_2(a)\leqslant 0$。

(v) $\rho_1 d^2(\theta_1(x,y))+\sum_{j\in J}\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_{2_j}(x,y))\geqslant 0$,

则 $\frac{f(x)}{g(x)}\not\leqslant\frac{f(y)}{g(y)}$。

证明　如果 $\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\frac{f(y)}{g(y)}$, 至少 $\exists i_0, 1\leqslant i_0\leqslant p$, 使得

$$\frac{f_i(x)}{g_i(x)}\leqslant\frac{f_i(y)}{g_i(y)},$$

$$\frac{f_{i_0}(x)}{g_{i_0}(x)}<\frac{f_{i_0}(y)}{g_{i_0}(y)},\ i\neq i_0,$$

由于 $\lambda\in\Lambda^{++}$, 故

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i\frac{f_i(x)}{g_i(x)}\right)<\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i\frac{f_i(y)}{g_i(y)}\right),$$

据(iv), 得

$$b_1(x,y)\varphi_1\left[\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i\frac{f_i(x)}{g_i(x)}\right)-\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i\frac{f_i(y)}{g_i(y)}\right)\right]<0,$$

由(i)有

$$\alpha(x,y)C_{(x,y)}(\xi)+\rho_1 d^2(\theta_1(x,y))<0,$$

$$\forall\xi\in\partial^K\left[\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i\frac{f_i(y)}{g_i(y)}\right)\right],\tag{5}$$

根据 $\sigma_j\geqslant 0, j\in J(y)$ 和第二个约束条件, 得

$$h_j(x)\leqslant 0\leqslant h_j(y),$$

由(iv)和(ii),有

$$\beta_j(x,y)C_{(x,y)}(\sigma_j\zeta_j)+\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_{2_j}(x,y))\leqslant 0,$$

$\forall \zeta_j \in \partial^K h_j(y)$, $j \in J(y)$,

当 $j \in J \backslash J(y)$ 时, 令 $\sigma_j = 0$, 可知

$$\sum_{j\in J}\beta_j(x,y)C_{(x,y)}(\sigma_j\zeta_j) + \sum_{j\in J}\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_{2_j}(x,y)) \leqslant 0,$$

$$\forall \zeta_j \in \partial^K h_j(y), \tag{6}$$

式(5)、(6)相加,结合函数 C 的凸性与(iii), 得

$$\delta(x,y)C_{(x,y)}(\xi + \sum_{j\in J}\sigma_j\zeta_j) + \rho_1 d^2(\theta_1(x,y)) + \sum_{j\in J}\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_{2_j}(x,y)) < 0,$$

依(v)知

$$\delta(x,y)C_{(x,y)}(\xi + \sum_{j\in J}\sigma_j\zeta_j) < 0,$$

这与(MSIFD)的第一个约束条件矛盾! 所以

$$\frac{f(x)}{g(x)} \nleqslant \frac{f(y)}{g(y)}。$$

定理 3(弱对偶) 设 $x \in X$, $(y,\lambda,\sigma) \in S$, 若 $\lambda \in \Lambda^+$, $(\sigma_j)_{j\in J} \in \mathbf{R}_+^{(J)}$, $\exists\, C$, α, β, δ, b_1, b_2, φ_1, φ_2, $\rho_1 \in \mathbf{R}$, $\rho_2 \in \mathbf{R}^{(J)}$, d, θ_1, θ_2 和局部渐近锥 K, 有

(i) $\lambda^{\mathrm{T}}\left(\frac{f}{g}\right)$ 在 y 处是广义 $(C,\alpha,\rho_1,d)_{K,\theta_1}$-严格伪凸函数。

(ii) 当 $j \in J(y)$ 时, h 在 y 处是广义 $(C,\beta,\rho_2,d)_{K,\theta_2}$-拟凸函数。

(iii) $\alpha = \beta_1 = \cdots = \beta_{(J)} = \delta$。

(iv) $b_1(x,y) > 0$, $b_2(x,y) > 0$; 若 $a \leqslant 0$, 则 $\varphi_1(a) \leqslant 0$, 若 $a \leqslant 0$, 则 $\varphi_2(a) < 0$。

(v) $\rho_1 d^2(\theta_1(x,y)) + \sum_{j\in J}\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_{2_j}(x,y)) \geqslant 0$,

则 $\frac{f(x)}{g(x)} \nleqslant \frac{f(y)}{g(y)}$。

证明 证明类似定理 2。

定理 4(弱对偶) 设 $x \in X$, $(y,\lambda,\sigma) \in S$, 若 $\lambda \in \Lambda^{++}$, $(\sigma_j)_{j\in J} \in \mathbf{R}_+^{(J)}$, $\exists\, C$, α, β, δ, b_1, b_2, φ_1, φ_2, $\rho_1 \in \mathbf{R}$, $\rho_2 \in \mathbf{R}^{(J)}$, d, θ_1, θ_2 和局部渐近锥 K, 有

(i) $\lambda^{\mathrm{T}}\left(\frac{f}{g}\right)$ 在 y 处是广义 $(C,\alpha,\rho_1,d)_{K,\theta_1}$-弱拟凸函数。

(ii) 对于 $j \in J(y)$, h 在 y 处是广义 $(C,\beta,\rho_2,d)_{K,\theta_2}$-严格伪凸函数。

(iii) $\alpha = \beta_1 = \cdots = \beta_{(J)} = \delta$。

(iv) $b_1(x,y) > 0$, $b_2(x,y) > 0$; 若 $a < 0$, 则 $\varphi_1(a) < 0$, 若 $a \leqslant 0$, 则 $\varphi_2(a) < 0$。

(v) $\rho_1 d^2(\theta_1(x,y)) + \sum_{j\in J}\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_{2_j}(x,y)) \geqslant 0$,

则 $\frac{f(x)}{g(x)} \nleqslant \frac{f(y)}{g(y)}$。

证明 证明类似定理 2。

定理 5(强对偶) 设 $\tilde{x}$ 是(MSIFP)的一个弱有效解, 若 $\lambda \in \Lambda^+$, $(\sigma_j)_{j\in J} \in \mathbf{R}_+^{(J)}$, $\exists\, C$, α, β, δ, b_1, b_2, φ_1, φ_2, $\rho_1 \in \mathbf{R}$, $\rho_2 \in \mathbf{R}^{(J)}$, d, θ 和局部渐近锥 K, 有

(i) $\frac{f}{g}$ 在 y 处是广义 $(C,\alpha,\rho_1,d)_{K,\theta}$-凸函数。

(ii) 对于 $j \in J(y)$, h 在 y 处是广义 $(C,\beta,\rho_2,d)_{K,\theta}$-凸函数。

(iii) 广义 Slater 条件成立, 即 $x^0 \in X$, 有 $h_{j_0}(x^0) < 0$, $j_0 \in J(y)$, 且 $\sigma_{j_0} > 0$。

(iv) $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_{(J)} = \delta$。

(v) $b_1(x,y) > 0$, $b_2(x,y) > 0$; 若 $a < 0$, 则 $\varphi_1(a) < 0$, 若 $a \leqslant 0$, 则 $\varphi_2(a) < 0$。

(vi) $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\rho_{1_i}d^2(\theta_i(x^0,y)) + \sum_{j\in J}\sigma_j\rho_{2_j}d^2(\theta_j(x^0,y)) \geqslant 0$。

(vii) 在 $\tilde{x}$ 处 K-T 约束条件成立,

则 $\exists\, \tilde{\lambda} \in \Lambda^+$, 使得 $(\tilde{x},\tilde{\lambda},\tilde{\sigma})$ 是(MSIFD)的有效解, 且(MSIFP)与(MSIFD)的目标函数值相等。

证明 因为 $\tilde{x}$ 是(MSIFP)的一个弱有效解, 并且在 $\tilde{x}$ 处 K-T 约束条件成立, 则 $\exists\, \tilde{\lambda}_i > 0$, $i=1,\cdots,p$, 及 $(\tilde{\sigma}_j)_{j\in J} \in \mathbf{R}_+^{(J)}$, 使得

$$0 \in \partial^K\left[\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_i\frac{f_i(\tilde{x})}{g_i(\tilde{x})}\right)\right] + \sum_{j\in J}\tilde{\sigma}_j\partial^K h_j(\tilde{x}),$$

$$\tilde{\sigma}_j h_j(\tilde{x}) = 0, j \in J, (\tilde{\lambda},\tilde{\sigma}) \geqslant 0,$$

则 $(\tilde{x},\tilde{\lambda},\tilde{\sigma})$ 是(MSIFD)的可行解。

若 $(\tilde{x},\tilde{\lambda},\tilde{\sigma})$ 不是(MSIFD)的有效解, $\exists (y,\lambda,\sigma) \in S_1$, 使得

$$\frac{f(\tilde{x})}{g(\tilde{x})} \leqslant \frac{f(y)}{g(y)},$$

据定理 1 有 $\frac{f(\tilde{x})}{g(\tilde{x})} \nleqslant \frac{f(y)}{g(y)}$, 这与上式矛盾, 由此 $(\tilde{x},\tilde{\lambda},\tilde{\sigma})$ 是(MSIFD)的有效解。

易知(MSIFP)与(MSIFD)有相等的目标函数值。

定理 6(强对偶) 设 $\tilde{x}$ 是(MSIFP)的一个有效解, 若 $\lambda \in \Lambda^{++}$, $(\sigma_j)_{j\in J} \in \mathbf{R}_+^{(J)}$, $\exists C$, α, β, δ, b_1,

$b_2, \varphi_1, \varphi_2, \rho_1 \in \mathbf{R}, \rho_2 \in \mathbf{R}^{(J)}, d, \theta$ 和局部渐近锥 K，有

(i) $\dfrac{f}{g}$ 在 y 处是广义 $(C,\alpha,\rho_1,d)_{K,\theta}$-伪凸函数。

(ii) 当 $j \in J(y)$ 时，h 在 y 处是广义 $(C,\beta,\rho_2,d)_{K,\theta}$-拟凸函数。

(iii) $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_{(J)} = \delta$。

(iv) $b_1(x,y) > 0, b_2(x,y) > 0$; 若 $a < 0$, 则 $\varphi_1(a) < 0$, 若 $a \leqslant 0$, 则 $\varphi_2(a) < 0$。

(v) $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \rho_{1_i} d^2(\theta_i(x^0,y)) + \sum\limits_{j\in J} \sigma_j \rho_{2_j} d^2(\theta_j(x^0,y)) \geqslant 0$。

(vi) 在 $\tilde{x}$ 处 K-T 约束条件成立，即存在 $\tilde{\lambda} \in \mathbf{R}_+^p$, $\tilde{\sigma} \in \mathbf{R}_+^{(J)}$，使得

$$0 \in \partial^K \left[\sum_{i=1}^{p} \left(\lambda_i \frac{f_i(\tilde{x})}{g_i(\tilde{x})} \right) \right] + \sum_{j\in J(\tilde{x})} \tilde{\sigma}_j \partial^K h_j(\tilde{x}),$$

$$\tilde{\sigma}_j h_j(\tilde{x}) = 0, j \in J, (\tilde{\lambda},\tilde{\sigma}) \geqslant 0,$$

则 $\exists \tilde{\lambda} \in \Lambda^{++}$，使得 $(\tilde{x},\tilde{\lambda},\tilde{\sigma})$ 为(MSIFD)的有效解，且(MSIFP)与(MSIFD)有相等的目标函数值。

证明　证明类似定理 5。

3　结语

本文在已有文献提出的新广义凸性概念基础上,针对包含此类广义凸性的分式规划的对偶问题进行了探讨,得到的结果丰富了广义凸性和最优化的有关理论,可进一步研究其 Wolfe 型对偶性、鞍点等内容。

参考文献:

[1] YUAN D H, LIU X L, CHINCHULUUN A, et al. Nondifferentiable minimax fractional programming problems with (C,α,ρ,d)-convexity [J]. Journal of Optimization Theory and Application, 2006, 129(1): 185-199.

[2] CHINCHULUUN A, PARDALOS P M. Multiobjective programming problems under generalized convexity[M]//TÖRN A, ŽILINSKAS J. Models and Algorithms for Global Optimization. New York: Springer, 2007: 3-20.

[3] CHINCHULUUN A, YUAN D H, PARDALOS P M. Optimality conditions and duality for nondifferentiable multiobjective fractional programming with generalized convexity [J]. Annals of Operations Research, 2007, 154(1): 133-147.

[4] YUAN D H, CHINCHULUUN A, LIU X L, et al. Generalized Convexities and generalized gradients based on algebraic operations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 321(2): 675-690.

[5] YUAN D H, CHINCHULUUN A, LIU X L, et al. Optimality conditions and duality for multiobjective programming involving (C,α,ρ,d)-type-I functions[M]//KONNOV I V, LUC D T, RUBINOV A M. Lecture Notes in Economics & Mathematical Systems: Generalized Convexity and Related Topics. Berlin: Springer-Verlag, 2007: 73-87.

[6] LONG X J. Optimality conditions and duality for nondifferentiable multiobjective fractional programming problems with (C,α,ρ,d)-convexity [J]. Journal of Optimization Theory and Application, 2011, 148(1): 197-208.

[7] 严建军, 李钰, 李江荣. 关于一类多目标半无限分式规划的最优性条件[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2018, 32(12): 205-210.

[8] 严建军, 李钰, 杨帆, 等. 关于一类多目标半无限规划的最优性条件[J]. 贵州大学学报(自然科学版), 2019, 36(2): 16-20.

[9] KANZI N. Necessary and sufficient conditions for (weakly) efficient of non-differentiable multi-objective semi-infinite programming problems[J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science, 2018, 42(3): 1537-1544.

[10] CHUONG T D, KIM D S. Nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014, 160(3): 748-762.

(责任编辑:周晓南)

Duality for a Class of Fractional Programming with Generalized C-Convexity

LI Yu[1*], YAN Jianjun[1,2], LI Jiangrong[1]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China;
2. Yan'an Vocational and Technical College, Yan'an 716000, China)

Abstract: With the foundation of generalized $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-convex function, generalized $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-pseudoconvex function and generalized $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-quasiconvex function, several duality theorems for a class of multi-objective semi-infinite fractional programming relating to the new generalized convexity were discussed and proved.

Key words: fractional programming; generalized $(C,\alpha,\rho,d)_{K,\theta}$-convex function; duality